

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PROFMAT**

Marisa Maria Onofre

**MATRIZ DE LESLIE APLICADA AOS MODELOS  
POPULACIONAIS**

Florianópolis

2017



Marisa Maria Onofre

**MATRIZ DE LESLIE APLICADA AOS MODELOS  
POPULACIONAIS**

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Onofre, Marisa Maria  
Matriz de Leslie aplicada aos modelos  
populacionais / Marisa Maria Onofre ; orientador,  
Maria Inez Cardoso Gonçalves, 2017.  
80 p.

Dissertação (mestrado profissional) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de  
Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós  
Graduação em Matemática, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Álgebra Linear. 3. Matrizes.  
4. Modelo de Leslie. 5. Crescimento Populacional.  
I. Gonçalves, Maria Inez Cardoso. II. Universidade  
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação  
em Matemática. III. Título.

Marisa Maria Onofre

**MATRIZ DE LESLIE APLICADA AOS MODELOS  
POPULACIONAIS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial.

Florianópolis, 28 de setembro 2017.

---

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC  
Coordenador

**Banca Examinadora:**

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Maria Inez Cardoso Gonçalves  
Orientadora  
UFSC

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Melissa Weber Mendonça  
UFSC

---

Prof. Dr. Marcelo Sobottka  
UFSC

---

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro  
UFSC

Dedico este trabalho ao meu esposo Joel e as minhas filhas Maria Helena e Sophia pelo total apoio nesta jornada e aos meus amados pais, Heleodoro e Maria, que sempre me apoiaram e incentivaram a seguir em frente.





## AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho ocorreu devido ao grande apoio e confiança que recebi de várias pessoas e instituições, para os quais deixo os meus sinceros agradecimentos.

Primeiramente, à Jesus Cristo, pela vida, saúde e capacidade de ultrapassar cada obstáculo, que não foram poucos, encontrado no percurso, até concluir mais uma etapa na minha formação acadêmica. Obrigada Jesus Cristo de infinita bondade pelas conquistas que o Senhor me concedeu.

À minha mãe, pessoa simples, mas com grande capacidade em transmitir amor, fé, perseverança, força, bondade, honestidade, sabedoria e segurança. Sem o apoio dessa grande mulher seria quase impossível ser quem sou.

Ao meu pai, que sempre me incentivou a estudar e seguir em frente.

Ao meu esposo, pela ajuda, pelo incentivo e apoio incondicional durante toda a caminhada.

Às minhas filhas, por compreenderem que eu não disponibilizava de tempo para dar a elas a devida atenção que mereciam durante os estudos.

À minha orientadora, professora doutora Maria Inez Cardoso Gonçalves, pela paciência, disposição e empenho aplicados na execução desse projeto.

Aos meus dedicados professores, pela ajuda na fundamentação dessa conquista. Agradeço especialmente aos professores doutores Celso Melchhiades Doria, Eliezer Batista e Ruy Charão pelas conversas e experiências compartilhadas durante o curso.

Aos meus ilustres colegas de curso, Daiane, David, Hyandra, Lucas, Marco, Nicole e Osmarilda, por toda contribuição, cumplicidade e dedicação, consequência de nossa união.

Na elaboração deste trabalho, um agradecimento especial ao meu colega Antônio João pela disposição e comprometimento, quanto ao precioso auxílio na formatação e esclarecimento de recursos do programa LaTeX.

Aos coordenadores do PROFMAT UFSC, professores doutores Celso Melchhiades Doria e Maria Inez Cardoso Gonçalves, pelo empenho, competência e disponibilidade em suprir as necessidades surgidas.

Às pessoas que trabalham na secretaria do departamento de matemática da UFSC.

À CAPES, por ter concedido bolsa de estudo durante dois anos.

À professora doutora Cláudia Cristina Zanela, diretora do ensino fundamental da PMF e ao secretário de educação do município de Florianópolis, senhor Rodolfo Joaquim Pinto da Luz na gestão 2013 a 2016, pela concessão de Licença Aperfeiçoamento de 20 horas semanais no período de 06 de abril de 2015 à 06 de abril de 2017.

A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.

(Albert Einstein)



## RESUMO

Esta dissertação expõe uma aplicação da álgebra linear, o modelo de Leslie, que descreve o crescimento populacional de fêmeas de uma determinada população. Para tanto se apresenta a definição de autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes, visando a estruturação do modelo. Com o propósito de mostrar aos alunos do ensino básico um exemplo prático envolvendo matrizes, este trabalho propõe usar o modelo de Leslie em um estudo da projeção futura feminina distribuída em faixas etárias com a finalidade de verificar a sustentabilidade do sistema previdenciário brasileiro a longo prazo.

**Palavras-chave:** Álgebra Linear. Modelo de Leslie. Crescimento Populacional. Matrizes.



## ABSTRACT

This dissertation exposes an application of linear algebra, the Leslie model, which describes the population growth of females of a given population. For this, the definition of eigenvalues, eigenvectors and diagonalization of matrices is presented, aiming the structuring of the model. With the purpose of showing the students of basic education a practical example involving matrices, this work proposes to use the Leslie model in a study of the future female projection distributed in age groups in order to verify the sustainability of the Brazilian social security system in the long term.

**Keywords:** Linear algebra. Leslie's model. Population growth. Matrices.





## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Distribuição etária.....	43
Figura 2	Mudança populacional.....	50
Figura 3	Proporção populacional por faixa etária .....	50
Figura 4	Comportamento limite da função $q$ .....	53
Figura 5	Distribuição etária.....	65



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Divisão populacional de fêmeas em $n$ faixas etárias . . . .	44
Tabela 2	População residente - percentual do total geral . . . . .	67
Tabela 3	Filhos tidos nascidos vivos . . . . .	67
Tabela 4	Óbitos por Sexo . . . . .	68
Tabela 5	Mulheres, filhas nascidas vivas e óbitos femininos . . . . .	68
Tabela 6	Parâmetros $a_i$ e $b_i$ . . . . .	70
Tabela 7	Situação previdenciária feminina . . . . .	75



## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CAPES	Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
SIDRA	Sistema IBGE De Reprodução Automática
PMF	Prefeitura Municipal de Florianópolis
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\Sigma$	Somatório





## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	25
<b>2</b>	<b>ÁLGEBRA LINEAR</b> .....	27
2.1	AUTOVALORES E AUTOVETORES .....	27
<b>2.1.1</b>	<b>Cálculo de Autovalores e Autovetores</b> .....	28
2.2	DIAGONALIZAÇÃO DE UMA MATRIZ .....	37
<b>3</b>	<b>MATRIZ DE LESLIE</b> .....	41
3.1	INTRODUÇÃO AO MODELO MATRICIAL .....	41
<b>3.1.1</b>	<b>Descrição do Modelo</b> .....	44
3.2	COMPORTEAMENTO LIMITE .....	51
3.3	APLICAÇÃO DA MATRIZ DE LESLIE .....	66
<b>3.3.1</b>	<b>Projeção da População Brasileira Feminina por Faixas Etárias</b> .....	66
<b>3.3.2</b>	<b>Verificação de Sustentabilidade do Sistema Previ- denciário Brasileiro</b> .....	74
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	77
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	79



## 1 INTRODUÇÃO

O modelo de Leslie desenvolvido na década de 1940 (ANTON; RORRES, 2001), é comumente usado por demógrafos e biólogos para estimar o crescimento populacional. Com esse modelo é possível analisar o crescimento das populações de fêmeas animais ou humanas por faixas etárias. Através da matriz de Leslie pode-se investigar o desenvolvimento populacional ao longo do tempo, e determinar o limite da distribuição etária e a taxa de crescimento da população.

O presente texto descreve uma das diversas aplicações da Álgebra Linear. Sendo assim o leitor precisa ter familiaridade com Álgebra Linear, serão expostos revisão de alguns conceitos e teoremas necessários para o entendimento do mesmo.

No capítulo dois são expostos os conceitos de autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes que serão necessários ao entendimento do próximo capítulo.

O último capítulo é dedicado à construção do modelo matricial de Leslie. Para tanto, são utilizados os conteúdos vistos no capítulo dois com o intuito de analisar o crescimento populacional feminino a longo prazo. Finalmente é feita uma aplicação da matriz de Leslie, usando a projeção da população brasileira feminina por faixas etárias. Os dados utilizados para aplicação deste modelo foram obtidos das tabelas do censo brasileiro de 2010. A partir da análise de nascimento, morte e envelhecimento do ano de 2010 foi aplicado o modelo de Leslie para verificar o crescimento populacional feminino à longo prazo. Assim sendo, a população feminina brasileira foi dividida em faixas etárias de dez em dez anos, onde a quantidade de mulheres em cada faixa etária fornece o vetor  $x^{(0)}$  que contém a população inicial de fêmeas. Esta aplicação tem como objetivo permitir ao leitor, baseado no modelo de Leslie, verificar a sustentabilidade do sistema previdenciário brasileiro no futuro.



## 2 ÁLGEBRA LINEAR

Neste capítulo serão apresentados os conceitos de autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes que são os pré-requisitos para o estudo do crescimento populacional por faixa etária.

Para maiores detalhes ver as referências (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 2007; BOLDRINI et al., 1986; LAY, 1999; LEON, 1999; COELHO; LOURENÇO, 2007).

### 2.1 AUTOVALORES E AUTOVETORES

**Definição 2.1.1** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Um escalar  $\lambda$  é um **autovalor** de  $A$  se existe um vetor não nulo  $x \in \mathbb{C}^n$  tal que  $Ax = \lambda x$ . O vetor  $x$  é um **autovetor** de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ .*

**Exemplo 2.1.1** *Considerando as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad e \quad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo

$$Ax = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5x,$$

tem-se que  $\lambda = 5$  é um autovalor de  $A$  e  $x = (-3, 1)^T$  é um autovetor associado a  $\lambda = 5$ . De fato, qualquer múltiplo não nulo de  $x$  é um autovetor, já que

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x)$$

Então, por exemplo,  $(6, -2)^T$  também é um autovalor associado a  $\lambda = 5$ ,

$$\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

### 2.1.1 Cálculo de Autovalores e Autovetores

Inicia-se esta seção relembrando a definição de núcleo de uma matriz.

**Definição 2.1.2** *Seja  $B$  uma matriz  $m \times n$  (real ou complexa), o conjunto*

$$\{x \in \mathbb{C}^n \mid Bx = 0\}$$

*é chamado núcleo de  $B$  e denotado por  $\ker(B)$  ou  $N(B)$ .*

Pode-se mostrar que  $\ker(B)$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{C}^n$ , veja (LEON, 1999) p. 92.

Com relação ao cálculo de autovalores e autovetores, observe que a equação  $Ax = \lambda x$  pode ser reescrita como

$$(A - \lambda I)x = 0. \tag{2.1}$$

Assim,  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  se, e somente se o sistema homogêneo (2.1) possui uma solução não trivial, ou seja, se, e somente se  $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$  e um autovetor associado a  $\lambda$  é algum vetor não nulo contido em  $\ker(A - \lambda I)$ . O subespaço  $\ker(A - \lambda I)$  é denominado de *autoespaço* associado a  $\lambda$ .

A equação (2.1) terá uma solução não trivial se, e somente se  $A - \lambda I$  for singular <sup>1</sup>, ou seja,

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{2.2}$$

Conforme (LEON, 1999), p. 213, expandindo o determinante em (2.2), tem-se um polinômio de grau  $n$  na variável  $\lambda$ .

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Esse polinômio é denominado de *polinômio característico* de  $A$ , e a equação (2.2) é chamada *equação característica* de  $A$ . As raízes do polinômio característico são os autovalores de  $A$ . O polinômio característico terá exatamente  $n$  raízes se contadas as raízes de acordo com a

---

<sup>1</sup> *Definição:* Uma matriz quadrada é dita singular quando não tem inversa.

sua multiplicidade. Sendo assim,  $A$  tem  $n$  autovalores, podendo alguns destes estar repetidos, mas todos são números complexos.

Resumindo, foram estabelecidas cinco condições afins para que  $\lambda$  seja um autovalor de  $A$ .

Sendo  $A$  uma matriz de ordem  $n$  e  $\lambda$  um escalar. As seguintes afirmações são equivalentes:

- $\lambda$  é um autovalor de  $A$ ;
- $(A - \lambda I)x = 0$  tem uma solução não trivial;
- $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$ ;
- $A - \lambda I$  é singular;
- $\det(A - \lambda I) = 0$ .

Os exemplos (2.1.2), (2.1.3) e (2.1.4) ilustram os cálculos de autovalores, autovetores e autoespaços usando o polinômio característico.

**Exemplo 2.1.2** *Encontre todos os autovalores e os autoespaços associados da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Resolução:* Primeiramente é necessário encontrar os autovalores de  $A$ , para tanto deve-se encontrar as raízes do polinômio característico de  $A$ , ou seja, as raízes de  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ,

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = (1 - \lambda)(\lambda - 3)^2.$$

Assim, as raízes de  $P_A(\lambda)$  são  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ , e portanto os autovalores da matriz  $A$  são 1 e 3.

Para encontrar o autoespaço associado a  $\lambda_1 = 1$  é necessário encontrar o  $\ker(A - I)$ , ou seja, resolver o sistema

$$(A - I)u = 0,$$

onde  $u = (x, y, z)^T$ . O sistema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 2 \\ 1 & 2-1 & -1 \\ -1 & 1 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz do sistema é:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

cuja forma escada reduzida é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tem-se então  $x = 2z$ ,  $y = -z$  e  $z$  é a variável livre. Portanto, o autoespaço associado ao autovalor  $\lambda_1 = 1$  consiste de todos os vetores da forma  $u_1 = (2z, -z, z)^T$ , onde  $z \in \mathbb{C}$ .

Para encontrar o autoespaço associado a  $\lambda_2 = 3$ , procede-se de maneira semelhante, porém tem-se que resolver agora o sistema

$$(A - 3I)u = 0,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 & 2 \\ 1 & 2-3 & -1 \\ -1 & 1 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz do sistema é:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e sua forma escada reduzida é:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então segue que  $x - y - z = 0$ , ou seja,  $x = y + z$ ,  $y$  e  $z$  são variáveis livres. Portanto, o autoespaço associado a  $\lambda_2 = 3$  consiste em todos os



vetores da forma  $u_2 = (y + z, y, z)^T$ , onde  $y$  e  $z \in \mathbb{C}$ .

**Exemplo 2.1.3** *Determine os autovalores e os autovetores associados da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Resolução:* Primeiramente precisa-se encontrar os autovalores de  $A$ , para tanto é necessário encontrar as raízes do polinômio característico de  $A$ , ou seja, as raízes de  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ,

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5).$$

Assim, as raízes de  $P_A(\lambda)$  são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 5$ , e portanto os autovalores da matriz  $A$  são  $-1$  e  $5$ .

Para encontrar os autovetores associados a  $\lambda_1 = -1$  é necessário encontrar o  $\ker(A - (-1)I)$ , ou seja, resolver o sistema  $(A + I)u = 0$ , onde  $u = (x, y)^T$ . O sistema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 - (-1) & 4 \\ 2 & 3 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz do sistema é:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

e sua forma escada reduzida é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então segue que  $x + 2y = 0$ , ou seja,  $x = -2y$  e  $y$  é a variável livre. Assim obtém-se  $u_1 = (-2y, y)^T = y(-2, 1)^T$  com  $y \in \mathbb{C}$ . Logo qualquer múltiplo não nulo de  $(-2, 1)^T$  é um autovetor associado a  $\lambda_1$ .

Analogamente, para encontrar os autovetores associados a  $\lambda_2 = 5$  é necessário resolver o sistema  $(A - 5I)u = 0$ , onde  $u = (x, y)^T$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 - 5 & 4 \\ 2 & 3 - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz do sistema é:

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

e sua forma escada reduzida é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então segue que  $x = y$  e  $y$  é a variável livre. Assim obtém-se  $u_2 = (y, y)^T = y(1, 1)^T$ , com  $y \in \mathbb{C}$ . Portanto, qualquer múltiplo não nulo de  $(1, 1)^T$  é um autovetor associado a  $\lambda_2$ .

**Exemplo 2.1.4** *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Encontre os autovalores e os autovetores associados da matriz  $A$ .*

*Resolução:* Primeiramente precisa-se encontrar os autovalores de  $A$ , para tanto é necessário encontrar as raízes do polinômio característico de  $A$ , ou seja, as raízes de  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ,

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

As raízes do polinômio característico são  $\lambda_1 = -i$  e  $\lambda_2 = i$ . Logo, os autovalores da matriz  $A$  são  $-i$  e  $i$ .

Para encontrar os autovetores associados a  $\lambda_1 = -i$  é necessário resolver o sistema  $(A + iI)u = 0$ , onde  $u = (x, y)^T$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 - (-i) & -2 \\ 1 & -1 - (-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz do sistema é

$$A + iI = \begin{pmatrix} 1 + i & -2 \\ 1 & -1 + i \end{pmatrix},$$

cujas forma escada reduzida é

$$\begin{pmatrix} 1 + i & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tem-se então  $(1+i)x - 2y = 0$ , ou seja,  $y = \frac{1+i}{2}x$  e  $x$  é a variável livre. Assim obtém-se  $u_1 = (x, \frac{1+i}{2}x)^T = x(1, \frac{1+i}{2})^T$ , com  $x \in \mathbb{C}$ . Portanto, qualquer múltiplo não nulo de  $(1, \frac{1+i}{2})^T$  é um autovetor associado a  $\lambda_1$ .

Analogamente, para encontrar os autovetores associados a  $\lambda_2 = i$  é necessário resolver o sistema  $(A - iI)u = 0$ , onde  $u = (x, y)^T$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz do sistema é

$$A - iI = \begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix},$$

cuja forma escada reduzida é

$$\begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então segue que  $(1-i)x - 2y = 0$ , ou seja,  $y = \frac{1-i}{2}x$  e  $x$  é a variável livre. Assim obtém-se  $u_2 = (x, \frac{1-i}{2}x)^T = x(1, \frac{1-i}{2})^T$ , com  $x \in \mathbb{C}$ . Portanto, qualquer múltiplo não nulo de  $(1, \frac{1-i}{2})^T$  é um autovetor associado a  $\lambda_2$ .

**Teorema 2.1.1** *Se  $u_1, u_2, \dots, u_r$  são autovetores associados a autovalores distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  de uma matriz  $A$  de ordem  $n \times n$ , então o conjunto  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  é linearmente independente.*

**Demonstração:** Se  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  é linearmente dependente (LD), então existe um menor índice  $p$  tal que  $u_{p+1}$  é uma combinação linear dos vetores LI que o precedem, ou seja, existem escalares  $c_1, \dots, c_p$  tais que

$$c_1 u_1 + \dots + c_p u_p = u_{p+1}. \quad (2.3)$$

Multiplicando os dois lados de (2.3) por  $A$  e usando o fato de que  $Au_k = \lambda_k u_k$  para  $1 \leq k \leq r$ , segue que

$$c_1 A u_1 + \dots + c_p A u_p = A u_{p+1},$$

ou seja,

$$c_1 \lambda_1 u_1 + \dots + c_p \lambda_p u_p = \lambda_{p+1} u_{p+1}. \quad (2.4)$$

Multiplicando os dois lados de (2.3) por  $\lambda_{p+1}$  e subtraindo o resultado

de (2.4), tem-se que

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})u_1 + \cdots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})u_p = 0. \quad (2.5)$$

Mas como  $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  é LI, segue que  $c_i(\lambda_i - \lambda_{p+1}) = 0$ , para  $i = 1, \dots, p$ . Mas nenhum dos fatores  $(\lambda_i - \lambda_{p+1})$  é igual a zero, pois os autovalores são distintos. Logo,  $c_i = 0$  para  $i = 1, \dots, p$ . Então, por (2.3), segue que  $u_{p+1} = 0$ , o que é impossível, pois  $u_{p+1}$  é um autovetor. Assim,  $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  não pode ser linearmente dependente e, portanto, tem que ser LI.

**Corolário 2.1.1** *Se uma matriz  $A$  de ordem  $n \times n$  possui  $n$  autovalores complexos diferentes dois a dois, então existe uma base  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  formada de autovetores de  $A$ .*

**Demonstração:** A prova do corolário segue do Teorema (2.1.1).

Se  $A$  possui  $n$  autovalores distintos, pelo Teorema (2.1.1)  $\{u_1, \dots, u_n\}$  são LI em  $\mathbb{C}^n$ , então formam uma base de  $\mathbb{C}^n$ .

**Definição 2.1.3** *Uma matriz  $A$  de ordem  $n$  é semelhante à matriz  $B$  de ordem  $n$  se, e somente se, existe uma matriz  $P$  inversível tal que  $A = PBP^{-1}$ .*

Observe que se  $A$  é semelhante a  $B$  então  $B$  é semelhante a  $A$ : multiplicando a expressão  $A = PBP^{-1}$  por  $P^{-1}$  à esquerda e por  $B$  à direita, tem-se

$$P^{-1}AP = P^{-1}PBP^{-1}P = B.$$

Logo

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}.$$

Portanto, diremos que as matrizes  $A$  e  $B$  são semelhantes.

**Proposição 2.1.1** *Matrizes semelhantes têm mesmo polinômio característico.*

**Demonstração:** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$  semelhantes, existe uma matriz inversível  $M$  tal que  $B = M^{-1}AM$ . Daí :

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_n) = \det(M^{-1}AM - \lambda I_n) = \\ &= \det(M^{-1}AM - \lambda M^{-1}I_n M) = \det(M^{-1}(A - \lambda I_n)M) = \\ &= \det(M^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(M) = \det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda). \end{aligned}$$

Os três resultados a seguir serão necessários na demonstração do Teorema (3.2.1) do próximo capítulo.

Conforme (COELHO; LOURENÇO, 2007), p. 134, um operador linear é uma transformação linear  $T : U \rightarrow U$ , onde  $U$  é um espaço vetorial sobre um corpo  $K$ . Neste trabalho considere  $K = \mathbb{C}$ .

**Definição 2.1.4** *Seja  $T : U \rightarrow U$  um operador linear.*

- *Um autovalor de  $T$  é um elemento  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que existe um vetor não nulo  $u \in U$  com  $T(u) = \lambda u$ .*
- *Se  $\lambda$  é um autovalor de  $T$ , então todo vetor não nulo  $u \in U$  tal que  $T(u) = \lambda u$  é chamado de autovetor de  $T$  associado a  $\lambda$ . Denotando por  $\text{Aut}_T(\lambda)$  o subespaço de  $U$  gerado por todos os autovetores associados a  $\lambda$ .*

A Definição (2.1.5) e a Proposição (2.1.2) podem ser encontradas em (COELHO; LOURENÇO, 2007), p. 141.

**Definição 2.1.5** *Seja  $\lambda$  um autovalor de um operador linear  $T : U \rightarrow U$ , onde  $U$  é um espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que  $P_T(x) = (x - \lambda)^m q(x)$ , com  $q(x) \neq 0$ , seja o polinômio característico de  $T$ . O número  $m$  é chamado de multiplicidade algébrica de  $\lambda$  e é denotado por  $ma(\lambda)$ . A multiplicidade geométrica de  $\lambda$  é a dimensão do subespaço  $\text{Aut}_T(\lambda)$  que é indicado por  $mg(\lambda)$ .*

*Nota:*

Perceba que a multiplicidade algébrica de um autovalor  $\lambda$  é o maior índice  $j$ , tal que  $(x - \lambda)^j$  divide  $P_T(x)$ .

**Proposição 2.1.2** *Seja  $\lambda$  um autovalor de  $T : U \rightarrow U$ , onde  $U$  é um espaço vetorial de dimensão finita. Então  $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$ .*

**Demonstração:** Seja  $V = \text{Aut}_T(\lambda)$  e supondo que  $\dim_{\mathbb{C}} V = s$  e  $\dim_{\mathbb{C}} U = n$ , sendo  $s$  a dimensão de  $V$  no corpo  $\mathbb{C}$  e  $n$  a dimensão de  $U$  no corpo  $\mathbb{C}$ . Seja  $\beta_1 = \{v_1, \dots, v_s\}$  uma base de  $V$ . Como  $\beta_1$  é linearmente independente, existe uma base  $\beta = \{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$  de  $U$  contendo  $\beta_1$ . Como  $T(v_i) = \lambda v_i$  para  $i = 1, \dots, s$ , tem-se que

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & & \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & & A_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & A_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & \end{pmatrix},$$

onde  $[T]_{\beta}$  é a matriz do operador linear em relação à base  $\beta$ ,  $A_1 \in M_{s \times (n-s)}(\mathbb{C})$  e  $A_2 \in M_{(n-s) \times (n-s)}(\mathbb{C})$ . Determinando o polinômio característico, segue que

$$\begin{aligned} P_T(x) &= \det(xI_n - [T]_{\beta}) = \\ &= \det \left[ xI_s - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \right] \det(xI_{(n-s)} - A_2) = \\ &= (x - \lambda)^s \det(xI_{(n-s)} - A_2) \end{aligned}$$

Por definição, tem-se que  $ma(\lambda)$  é o maior índice  $j$  tal que  $(x - \lambda)^j$  divide  $P_T(x)$ . Portanto,  $mg(\lambda) = s \leq ma(\lambda)$ .

Seja agora  $T : U \rightarrow U$  um operador linear, onde  $U$  é um espaço vetorial de dimensão finita, tal que  $P_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_t)^{n_t}$ .

Note que a  $\dim_{\mathbb{C}} U = \sum_{i=1}^t n_i$ . Usando a proposição (2.1.2) segue que

$$\dim_{\mathbb{C}} U = \sum_{i=1}^t \dim_{\mathbb{C}} \ker(\lambda_i) \text{ se, e somente se, para cada } i,$$

$$mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i).$$

## 2.2 DIAGONALIZAÇÃO DE UMA MATRIZ

Muitos processos iterativos, como os modelos de Leslie para crescimento populacional, são modelados por:

$$x^{(k)} = A^k x_0,$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , a qual modela o processo, e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é um vetor dado, que geralmente descreve as condições iniciais do processo. Desta forma, o vetor  $x^{(k)}$  representa o comportamento do processo no tempo  $k$ .

Nesta seção será visto que algumas matrizes  $n \times n$  podem ser fatoradas como  $A = PDP^{-1}$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal  $n \times n$  e  $P$  é uma matriz  $n \times n$  inversível. Para tais matrizes pode-se calcular as potências de  $A$  de uma forma mais eficiente.

**Definição 2.2.1** *Uma matriz  $A_{n \times n}$  é diagonalizável se existem uma matriz  $D_{n \times n}$  diagonal e uma matriz  $P_{n \times n}$  inversível, tal que  $P^{-1}AP = D$ . Neste caso, dizemos que  $P$  **diagonaliza**  $A$ , ou seja,  $P$  é diagonalizante.*

### **Teorema 2.2.1 (Teorema da Diagonalização)**

*Uma matriz  $A$  de ordem  $n$  é diagonalizável se, e somente se,  $A$  possui  $n$  autovetores linearmente independentes.*

**Demonstração:** Suponha que  $A$  é diagonalizável. Então existe uma matriz inversível de ordem  $n$  e uma matriz diagonal  $D_{n \times n}$ , tais que  $P^{-1}AP = D$ , ou seja,  $AP = PD$ . Suponha que os vetores coluna de  $P$  sejam  $u_1, u_2, \dots, u_n$  e que os elementos da diagonal principal de  $D$  sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Observe que  $u_1, u_2, \dots, u_n$  são vetores não nulos, pois a matriz  $P$  é inversível. Então

$$AP = A[u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] = [Au_1 \ Au_2 \ \cdots \ Au_n], \quad (2.6)$$

enquanto

$$PD = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= [\lambda_1 u_1 \quad \lambda_2 u_2 \quad \cdots \quad \lambda_n u_n] \quad (2.7)$$

Como  $AP = PD$ , de (2.6) e (2.7) segue que

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto,  $u_1, u_2, \dots, u_n$  são autovetores de  $A$ , associados aos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  respectivamente. Como  $P$  é inversível, suas colunas  $u_1, u_2, \dots, u_n$  são linearmente independentes. Logo,  $A$  possui  $n$  autovetores linearmente independentes.

Reciprocamente, suponha que  $A$  possui  $n$  autovetores linearmente independentes, sendo  $u_1, u_2, \dots, u_n$  associados aos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  respectivamente; isto é,

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Seja  $P = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$ ,  $P$  é inversível, pois  $u_1, u_2, \dots, u_n$  são linearmente independentes e seja

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} AP &= A[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n] = [Au_1 \quad Au_2 \quad \cdots \quad Au_n] = \\ &= [\lambda_1 u_1 \quad \lambda_2 u_2 \quad \cdots \quad \lambda_n u_n] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz  $A$  é diagonalizável.

*Nota:*

Conforme (LAY, 1999), p. 289,  $A$  é diagonalizável se, e somente se existem autovetores suficientes para formar uma base para  $\mathbb{C}^n$ . Tal base é denominada **base de autovetores**.



**Teorema 2.2.2** *Uma matriz  $A$  quadrada com  $n$  autovalores distintos é diagonalizável.*

**Demonstração:** Sejam  $u_1, \dots, u_n$  autovetores associados aos  $n$  autovalores distintos da matriz  $A$ . Então  $\{u_1, \dots, u_n\}$  é linearmente independente, pelo Teorema (2.1.2) da Seção (2.1). Portanto, pelo Teorema (2.2.1),  $A$  é diagonalizável.

*Notas:*

1. Não é *necessário* que uma matriz  $A$  de ordem  $n$  tenha  $n$  autovalores distintos para ser diagonalizável.
2. Se  $A$  é diagonalizável, então os vetores colunas da matriz  $P$  que diagonaliza  $A$  são autovetores de  $A$  e os elementos diagonais de  $D$  são os autovalores associados.
3. A matriz  $P$  não é única. Trocando-se a ordem das colunas de uma matriz diagonalizante  $P$ , ou multiplicando-as por escalares não nulos, obtém-se outra matriz diagonalizante.
4. Se  $A$  é diagonalizável, então  $A$  pode ser fatorada em um produto  $PDP^{-1}$ , então segue que

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

e, então

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_n)^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

onde  $k \in \mathbb{N}$ .

Uma vez obtida uma fatoração  $A = PDP^{-1}$ , é fácil calcular as potências de  $A$ .

Assim, se  $A$  for diagonalizável, é possível calcular  $A^k$ , sem a necessidade de calcular o produto de  $k$  multiplicações de matrizes.

**Exemplo 2.2.1**<sup>2</sup>. *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 1$ . Tem-se o autovetor  $(1, 1, 1)^T$  associado a  $\lambda_1 = 0$  e os autovetores  $(1, 2, 0)^T$  e  $(0, -2, 1)^T$  associados a  $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Seja

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Embora  $\lambda = 1$  seja um autovalor múltiplo, a matriz ainda pode ser diagonalizada já que possui três autovetores linearmente independentes. Para este exemplo observe, também, que a igualdade a seguir é válida

$$A^k = PD^kP^{-1} = PDP^{-1} = A$$

para todo  $k \geq 1$ .

Conforme (LEON, 1999), p. 233, se uma matriz  $A$  de ordem  $n$  possui no máximo  $r$  autovetores linearmente independentes, onde  $r < n$ , dizemos que  $A$  é *defectiva*. Segue-se do Teorema (2.2.1) que uma matriz defectiva não é diagonalizável.

---

<sup>2</sup>(LEON, 1999)

### 3 MATRIZ DE LESLIE

#### 3.1 INTRODUÇÃO AO MODELO MATRICIAL

Neste capítulo descreve-se o modelo matricial de Leslie, o qual é muito utilizado por biógrafos e demógrafos, para determinar o crescimento populacional por faixa etária da parte fêmea de uma população humana ou animal.

O modelo de Leslie foi introduzido inicialmente em 1920, pelo matemático Alfred J. Lotka, (SILVA, 2016) porém o modelo só foi totalmente formulado em 1945 por Leslie Patrick Holt (1945), com o passar do tempo foi melhorado por Lefkovich (1965), a quem interessar aprofundar o conhecimento a respeito da matriz de Leslie, consultar (ANTON, 2001).

Com o objetivo de descrever e motivar o estudo do modelo de Leslie, iniciamos a seção com um exemplo:

*Uma população de animais consiste de 800 fêmeas na faixa etária 0 – 1 ano, 500 fêmeas na faixa etária 1 – 2 anos e 300 fêmeas na faixa etária 2 – 3 anos. Assuma também que estes animais vivem no máximo 3 anos.*

*A medida que o tempo passa, qual o número de fêmeas dentro da cada faixa etária?*

Para responder esta pergunta serão levados em consideração os seguintes fatores biológicos: nascimento, morte e envelhecimento.

Suponha que metade das fêmeas na faixa etária 0 – 1 ano sobreviva e passe para a faixa etária 1 – 2 anos, suponha também que metade das fêmeas na faixa etária 1 – 2 anos sobreviva e passe para a próxima faixa etária. Como estes animais vivem somente 3 anos, os que estão na terceira faixa etária estarão mortos no ano seguinte.

Com relação aos nascimentos, assumo que em média cada fêmea na segunda faixa etária tenha uma filha e na terceira faixa etária duas filhas.

Assim, após um ano o número de fêmeas na faixa etária 0 – 1 ano será de  $1 \cdot 500 + 2 \cdot 300$  (número de fêmeas nascidas de mães que estavam na segunda faixa etária mais o número de fêmeas nascidas de mães que estavam na terceira faixa etária).

Já o número de fêmeas na segunda faixa etária será o número de fêmeas que estavam na primeira faixa etária e sobreviveram, ou seja,

$$\frac{1}{2} \cdot 800.$$

Por último, o número de fêmeas na terceira faixa etária será o número de fêmeas que estavam na segunda faixa etária e sobreviveram, ou seja,

$$\frac{1}{2} \cdot 500.$$

Tem-se então:

<i>Faixa Etária</i>	<i>Número de fêmeas após um ano</i>
0 - 1	$1 \cdot 500 + 2 \cdot 300$
1 - 2	$\frac{1}{2} \cdot 800$
2 - 3	$\frac{1}{2} \cdot 500$

Os cálculos realizados acima para encontrar a população de fêmeas após um ano podem ser expressos através da seguinte multiplicação matriz-vetor:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 500 + 2 \cdot 300 \\ \frac{1}{2} \cdot 800 \\ \frac{1}{2} \cdot 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Chamando de  $L$  a matriz de ordem  $3 \times 3$  acima, de  $x^{(0)}$  o vetor que contém a população inicial de fêmeas e de  $x^{(1)}$  o vetor que contém a população de fêmeas após um ano, segue que

$$x^{(1)} = Lx^{(0)}.$$

Assumindo que as taxas de nascimento e sobrevivência se mantêm as mesmas, para encontrar a distribuição etária depois de dois anos, basta multiplicar  $x^{(1)}$  por  $L$ , ou seja,

$$x^{(2)} = Lx^{(1)}.$$

Como

$$x^{(1)} = Lx^{(0)},$$

tem-se

$$x^{(2)} = L(Lx^{(0)}) = L^2x^{(0)}.$$

Ou seja, para encontrar a distribuição da população de fêmeas em um determinado ano, basta multiplicar o vetor que contém a população

inicial pela matriz  $L$  um número apropriado de vezes,

$$x^{(k)} = L^k x^{(0)}.$$

Abaixo são apresentados os vetores de distribuição etária depois de 0, 5, 10, 15 e 20 anos:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix},$$

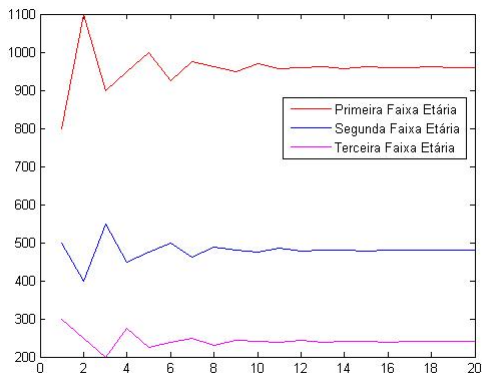
$$x^{(5)} = L^5 x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 475 \\ 225 \end{pmatrix},$$

$$x^{(10)} = L^{10} x^{(0)} = \begin{pmatrix} 968,750 \\ 475,000 \\ 240,625 \end{pmatrix},$$

$$x^{(15)} = L^{15} x^{(0)} = \begin{pmatrix} 960,9375 \\ 478,9063 \\ 240,6250 \end{pmatrix},$$

$$x^{(20)} = L^{20} x^{(0)} = \begin{pmatrix} 959,9609 \\ 479,8828 \\ 240,1367 \end{pmatrix}.$$

Figura 1 – Distribuição etária



Observando os vetores de distribuição etária acima, percebe-se que a medida que os anos passam a distribuição etária tende a estabilizar.

Será que isso sempre ocorre? Ou é específico desse exemplo?

Para responder essa pergunta na próxima seção será feito um estudo detalhado do Modelo de Leslie.

### 3.1.1 Descrição do Modelo

Nesta seção exibi-se a estrutura e as propriedades da matriz de Leslie para o caso específico do crescimento populacional feminino de uma população animal ou humana. Segundo (ANTON, 2001) p. 480, neste modelo, as fêmeas são divididas em faixas etárias de igual duração. Supondo que a idade máxima que uma população fêmea possa atingir seja  $L$  unidades de tempo (u.t.). Divide-se a população em  $n$  faixas etárias, cada faixa etária terá  $\frac{L}{n}$  u.t. de duração. As faixas etárias estão numeradas conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Divisão populacional de fêmeas em  $n$  faixas etárias

<i>Faixa Etária</i>	<i>Intervalo de Idade</i>
1	$[0, \frac{L}{n})$
2	$[\frac{L}{n}, \frac{2L}{n})$
3	$[\frac{2L}{n}, \frac{3L}{n})$
$\vdots$	$\vdots$
$n - 1$	$[\frac{(n-2)L}{n}, \frac{(n-1)L}{n})$
$n$	$[\frac{(n-1)L}{n}, L]$

*Fonte: Anton Rorres (2001, pg. 480)*

Assumindo que seja conhecido o número de fêmeas em cada uma das  $n$  faixas etárias no instante  $t = 0$  e supondo, particularmente, que existam  $x_1^{(0)}$  fêmeas na primeira faixa etária,  $x_2^{(0)}$  fêmeas na segunda faixa etária, e assim sucessivamente, pode-se construir o vetor

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix},$$

o qual é chamado **vetor de distribuição etária inicial**.

No decorrer do tempo verifica-se mudanças na quantidade de fêmeas, ocasionadas por três processos biológicos: nascimento, envelhecimento e morte. Essas mudanças, no número de indivíduos femininos, ocorrem dentro de cada uma das  $n$  faixas etárias. Pode-se projetar o vetor de distribuição etária inicial para o futuro através da exposição quantitativa dos três processos biológicos.

Segundo (ANTON 2001, p. 480) ”a maneira mais fácil de estudar o processo de envelhecimento é observar a população a intervalos discretos de tempo  $(t_0, t_1, \dots, t_k, \dots)$ . O modelo Leslie requer que a duração entre dois tempos de observação sucessivos seja igual à duração da faixa etária”. Logo:

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{L}{n}, t_2 = \frac{2L}{n}, \dots, t_k = \frac{kL}{n}, \quad (3.1)$$

Assim observa-se que todas as fêmeas na  $i$ -ésima faixa etária no instante  $t_k$ , estavam na  $(i - 1)$ -ésima faixa etária no instante  $t_{k-1}$ .

Os processos de nascimento e morte entre um par consecutivo de período de observação podem ser expostos por meio dos seguintes parâmetros demográficos:

$a_i, (i = 1, 2, \dots, n)$  é o número médio de fêmeas nascidas por mãe durante o tempo em que ela está na  $i$ -ésima faixa etária;

$b_i, (i = 1, 2, \dots, n - 1)$  é a fração de fêmea na  $i$ -ésima faixa etária que se espera que vá sobreviver e passar para a  $(i + 1)$ -ésima faixa etária.

Também pode ser interpretada como a probabilidade de uma fêmea mudar para o próximo grupo etário.

Pelo que foi definido acima, segue-se que:

- (i)  $a_i \geq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- (ii)  $0 < b_i \leq 1$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Note que os  $b_i$ 's são positivos, se algum  $b_i$  for nulo, então nenhuma fêmea sobreviveria além da  $i$ -ésima faixa etária. Considerando também que pelo menos um dos  $a_i$ 's é positivo, de modo que exista algum nascimento. A faixa etária onde se encontra o correspondente valor positivo de  $a_i$  é denominada **faixa etária fértil**.

O vetor de distribuição etária  $x^{(k)}$  no instante  $t_k$  é denotado por:

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix},$$

onde  $x_i^{(k)}$  é a quantidade de fêmeas na  $i$ -ésima faixa etária no instante  $t_k$ , sendo que as fêmeas na primeira faixa etária equivalem as filhas nascidas no intervalo de tempo entre  $t_{k-1}$  e  $t_k$ . Equacionando, tem-se que:

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \dots + a_n x_n^{(k-1)}, \quad (3.2)$$

onde:

- $x_1^{(k)}$  é o número de fêmeas na faixa etária 1 no tempo  $t_k$ ,
- $a_1 x_1^{(k-1)}$  é o número de filhas nascidas na faixa etária 1 entre os tempos  $t_{k-1}$  e  $t_k$ ,
- $a_2 x_2^{(k-1)}$  é o número de filhas nascidas na faixa etária 2 entre os tempos  $t_{k-1}$  e  $t_k$ ,
- $\vdots$
- $a_n x_n^{(k-1)}$  é o número de filhas nascidas na faixa etária  $n$  entre os tempos  $t_{k-1}$  e  $t_k$ .

As fêmeas na  $(i + 1)$ -ésima faixa etária ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) no instante  $t_k$  são aquelas fêmeas que estavam na  $i$ -ésima faixa etária no instante  $t_{k-1}$  e que ainda vivem no instante  $t_k$ . Equacionando, segue-se que

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (3.3)$$

sendo:

- $x_{i+1}^{(k)}$  o número de fêmeas na faixa etária  $i + 1$  no instante  $t_k$ ,
- $b_i$  a taxa de sobrevivência, ou seja, a fração de fêmeas na faixa etária  $i$  que sobrevivem e passam para faixa etária  $i + 1$  daqui a  $\frac{L}{n}$  unidades de tempo e
- $x_i^{(k-1)}$  o número de fêmeas na faixa etária  $i$  no instante  $t_{k-1}$ .



Resumindo, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k)} &= a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \dots + a_n x_n^{(k-1)} \\
 x_2^{(k)} &= b_1 x_1^{(k-1)} \\
 x_3^{(k)} &= b_2 x_2^{(k-1)} \\
 &\vdots \\
 x_n^{(k)} &= b_{n-1} x_{n-1}^{(k-1)}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

O conjunto de equações (3.4) pode ser representado na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{pmatrix},$$

a última igualdade pode ser escrita na seguinte forma

$$x^{(k)} = Lx^{(k-1)}, \text{ com } k = 1, 2, \dots \tag{3.5}$$

onde

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

é chamada **Matriz de Leslie**.

Da equação (3.5), obtém-se que:

$$\begin{aligned}
 x^{(1)} &= Lx^{(0)} = L^1 x^{(0)} \\
 x^{(2)} &= Lx^{(1)} = L^2 x^{(0)} \\
 x^{(3)} &= Lx^{(2)} = L^3 x^{(0)} \\
 &\vdots \\
 x^{(k)} &= Lx^{(k-1)} = L^k x^{(0)}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Em resumo,

$$x^{(k)} = L^k x^{(0)}. \quad (3.8)$$

Portanto, conhecendo a distribuição etária inicial  $x^{(0)}$  e a matriz de Leslie  $L$ , pode-se determinar a distribuição etária das fêmeas em tempos futuros.

**Exemplo 3.1.1** <sup>1</sup> *Uma espécie de besouro alemão, o vollmar-wasserman (abreviando, besouro VW), vive no máximo três anos. Dividimos as fêmeas em três faixas etárias de um ano cada: jovens (zero a um ano), adolescentes (um a dois anos) e adultas (dois a três anos). As jovens não põem ovos; cada adolescente produz uma média de quatro fêmeas; e cada adulta produz uma média de três fêmeas. A taxa de sobrevivência para as jovens é de 50% (isto é, a probabilidade de uma jovem se tornar uma adolescente é de 0,5), e a taxa de sobrevivência das adolescentes é de 25%. Suponha que a população inicia com 100 fêmeas de VWs: 40 jovens, 40 adolescentes e 20 adultas. Determine a população de besouros fêmeas para os próximos cinco anos.*

**Resolução:** Após um ano, o número de jovens será o produzido durante aquele ano:

$$40 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 220.$$

O número de adolescentes será o número de jovens sobreviventes:

$$40 \cdot 0,5 = 20.$$

De forma análoga, o número de adultas será o número de adolescentes sobreviventes:

$$40 \cdot 0,25 = 10.$$

Combinando as três últimas equações em uma equação matricial, segue que

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

ou  $x^{(1)} = Lx^{(0)}$ , em que  $x^{(0)} = (40 \ 40 \ 20)^T$  é o vetor de distribuição inicial,  $x^{(1)} = (220 \ 20 \ 10)^T$  é a distribuição após um ano e  $L$  é a matriz

---

<sup>1</sup>(POOLE, 2004), p. 207

de Leslie, dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando a equação  $x^{(k)} = Lx^{(k-1)}$  com  $k = 1, \dots, k$ , para calcular:

$$x^{(2)} = Lx^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 110 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$x^{(3)} = Lx^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 110 \\ 110 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 455 \\ 55 \\ 27,5 \end{pmatrix},$$

$$x^{(4)} = Lx^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 455 \\ 55 \\ 27,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 302,5 \\ 227,5 \\ 13,75 \end{pmatrix},$$

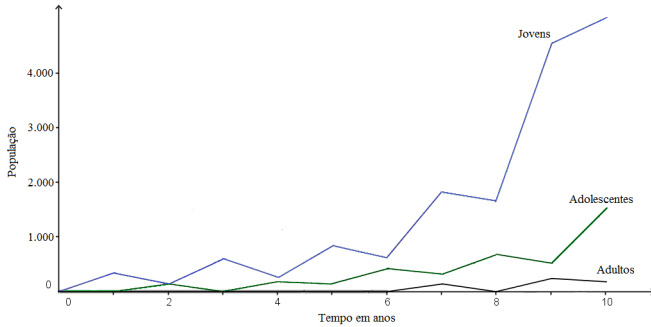
$$x^{(5)} = Lx^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 302,5 \\ 227,5 \\ 13,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 951,2 \\ 151,2 \\ 56,88 \end{pmatrix}.$$

Assim, depois de cinco anos, existirão aproximadamente 951 fêmeas VW jovens, 151 adolescentes e 57 adultas.

De modo geral, a população de besouros parece estar crescendo, embora existam algumas instabilidades, como um decréscimo de 250 para 225 besouros do primeiro ano para o segundo ano. A Figura 2 exibe a mudança na população em cada uma das três faixas etárias e claramente mostra o crescimento, com as instabilidades.

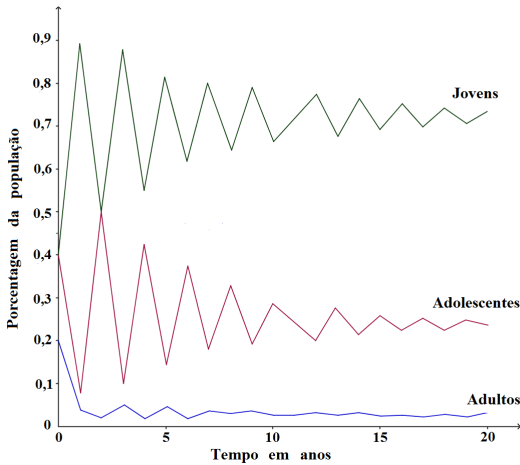
Se for usada a população *relativa* em cada faixa, em vez da população *real*, surgirá um padrão diferente. Para que isso ocorra é necessário determinar a fração anual da população em cada faixa etária, ou seja, é preciso dividir cada vetor pela soma dos seus componentes. Exemplificando, depois de um ano, tem-se que população é constituída da seguinte forma: 88% de jovens, 8% de adolescentes e 4% de adultas. Aplicando esses dados em relação ao tempo, obtém-se o gráfico conforme o da Figura 3.

Figura 2 – Mudança populacional



Fonte: Poole, 2004, p. 209

Figura 3 – Proporção populacional por faixa etária



Fonte: Poole, 2004, p. 210

O último gráfico expõe nitidamente que a proporção da população em cada faixa etária se aproxima de um estado estacionário. O vetor de estado estacionário, no exemplo, é

$$\begin{pmatrix} 0,72 \\ 0,24 \\ 0,04 \end{pmatrix},$$

ou seja, a longo tempo, a população feminina será constituída por 72% de jovens, 24% de adolescentes e 4% de adultas. Também podendo ser interpretado da seguinte maneira, a população feminina estará distribuída entre as faixas etárias segundo a razão  $18 : 6 : 1$  ou  $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{18}$ . Na próxima seção será exposto como determinar essa razão.

### 3.2 COMPORTAMENTO LIMITE

Para (ANTON, 2001) apesar da equação (3.8) permitir a leitura pontual da distribuição etária da população, ela não permite que se tenha uma ideia geral do padrão do processo de crescimento. Para isto, é preciso investigar os autovalores e autovetores da matriz de Leslie.

Como a matriz de Leslie possui uma estrutura especial, veja (3.6), é possível encontrar uma expressão para o seu polinômio característico.

**Proposição 3.2.1** *Seja  $L$  uma matriz de Leslie de ordem  $n \times n$ , então o polinômio característico de  $L$  é dado por*

$$P_L(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - \dots - a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}\lambda^0 \quad (3.9)$$

*Demonstração:* A demonstração deste resultado será feita pelo princípio da indução finita.

Para  $n = 2$ , segue que

$$P_L(\lambda) = \det(L - \lambda I) = {}^2\det(\lambda I - L) = \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 \\ -b_1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2b_1.$$

Logo (3.9) é válido para  $n = 2$ .

Supondo que (3.9) é válido para matrizes de Leslie de ordem  $n$ , ou seja,

$$P_L(\lambda) = \det(\lambda I - L) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ -b_1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} =$$

---

<sup>2</sup>São equivalentes

$$= \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - \dots - a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}.$$

Seja  $L$  uma matriz de Leslie de ordem  $(n+1) \times (n+1)$ . Assim, usando expansão em cofatores, veja (KOLMAN, 1998) p. 85, na última coluna de  $\lambda I - L$ , segue que

$$\begin{aligned} P_L(\lambda) = \det(\lambda I - L) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n & -a_{n+1} \\ -b_1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_n & \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -a_{n+1}(-1)^{1+(n+1)} \begin{vmatrix} -b_1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b_2 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_n \end{vmatrix} + 0 + \dots + 0 + \\ &+ \lambda(-1)^{(n+1)+(n+1)} \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ -b_1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -a_{n+1}(-1)^{n+2}(-1)^n(b_1 b_2 \dots b_n) + \lambda \det(\lambda I - L') \text{ por hip. ind.} \\ &= -a_{n+1}(-1)^{2(n+1)}(b_1 b_2 \dots b_n) + \\ &+ \lambda(\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - \dots - a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}) = \\ &= \lambda^{n+1} - a_1 \lambda^n - \dots - a_n b_1 \dots b_{n-1} \lambda - a_{n+1} b_1 b_2 \dots b_n. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução finita,

$$P_L(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \dots - a_nb_1b_2\dots b_{n-1}.$$

Para analisar as raízes de  $P_L(\lambda)$  é conveniente a introdução de uma nova função em  $\lambda$ .

Observe que para  $\lambda \neq 0$  tem-se que:

$$\frac{P_L(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - \left( \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_nb_1b_2\dots b_{n-1}}{\lambda^n} \right)$$

chamando

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_nb_1b_2\dots b_{n-1}}{\lambda^n} \quad (3.10)$$

e substituindo na última igualdade, tem-se que  $\frac{P_L(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - q(\lambda)$ , ou seja,  $q(\lambda) = 1 - \frac{P_L(\lambda)}{\lambda^n}$  e equivalentemente

$$P_L(\lambda) = (1 - q(\lambda))\lambda^n. \quad (3.11)$$

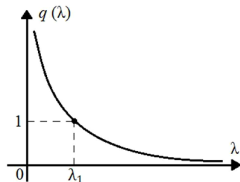
Portanto,

$$P_L(\lambda) = 0 \text{ implica } q(\lambda) = 1 \text{ para } \lambda \neq 0. \quad (3.12)$$

Será provado que pode-se escolher um autovalor  $\lambda > 1$  de  $L$ , ou seja, pode-se escolher um autovetor com todas as entradas positivas. Para tanto, por (3.12), será estudado o comportamento da função  $q(\lambda)$ .

Para maiores detalhes sobre limites no infinito e limites infinitos, veja (FLEMMING; GONÇALVES, 1990) p. 93 e p. 98 respectivamente.

Figura 4 – Comportamento limite da função  $q$



Fonte: Anton.Rorres, 2001, p. 481

Observe que:

1.  $q(\lambda)$  é monótona decrescente para  $\lambda > 0$ , ou seja,

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \implies q(\lambda_1) > q(\lambda_2),$$

$$2. \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} q(\lambda) = +\infty \text{ e}$$

$$3. \lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(\lambda) = 0.$$

Isso significa que existe um único  $\lambda > 0$ , tal que  $q(\lambda) = 1$ . Ou seja, a matriz de Leslie  $L$  admite um único autovalor positivo com multiplicidade algébrica um para  $q(\lambda) = 1$ .

A seguinte proposição será usada na demonstração do Teorema da Existência de um Autovalor Positivo.

**Proposição 3.2.2** *A raiz  $\lambda_1$  de um polinômio  $P(\lambda)$  é simples se, e somente se, a derivada de  $P(\lambda)$  em  $\lambda_1$  é diferente de zero.*

*Demonstração:* Considerando um polinômio arbitrário, com raízes distintas  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ ,

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}. \quad (3.13)$$

Supondo que  $n_1 = 1$ , ou seja, que  $\lambda_1$  é uma raiz simples de  $P(\lambda)$ , então

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}.$$

Derivando  $P(\lambda)$  segue que

$$P'(\lambda) = 1[(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}] + (\lambda - \lambda_1)^1 [(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}]'.$$

Substituindo  $\lambda$  por  $\lambda_1$  na igualdade acima, tem-se

$$P'(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda_1 - \lambda_i)^{n_i}.$$

Como  $\lambda_1 \neq \lambda_i$ , para todo  $i \neq 1$ , então  $P'(\lambda_1) \neq 0$ .

Supondo agora que a derivada do polinômio (3.13) em relação a  $\lambda_1$  é diferente de zero, isto é,  $P'(\lambda_1) \neq 0$ . Então

$$P'(\lambda) = n_1(\lambda - \lambda_1)^{(n_1-1)} [(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}] +$$

$$+(\lambda - \lambda_1)^{n_1} [(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}]' \neq 0.$$

Substituindo  $\lambda$  por  $\lambda_1$  na última equação, segue que  $P'(\lambda_1) = 0$ . Para obter  $P'(\lambda_1) \neq 0$  é necessário que alguma parcela da soma seja diferente de zero.



Note que a segunda parcela sempre será nula, independente do expoente. Então é preciso que a primeira parcela não seja zero. Para isso, é necessário que o expoente  $n_1 - 1 = 0$ , ou seja,  $n_1 = 1$ . Logo,  $\lambda_1$  é uma raiz simples do polinômio  $P(\lambda)$ .

*Nota:* A proposição (3.2.2) garante que o autovalor positivo  $\lambda_1$  tem multiplicidade 1, desde que seja uma raiz simples do polinômio característico da matriz de Leslie.

Com base, no que foi exposto anteriormente, tem-se os seguintes teoremas:

**Teorema 3.2.1** (*Existência de um Autovalor Positivo*)

*Uma matriz de Leslie  $L$  tem um único autovalor positivo  $\lambda_1$ . Este autovalor tem multiplicidade algébrica 1 e um autovetor associado  $u_1$  cujas entradas são todas positivas.*

*Demonstração:* Seja  $L$  a matriz de Leslie definida em (3.6). Pelo que foi exposto em (3.11), o polinômio característico de  $L$  pode ser escrito como

$$P_L(\lambda) = (1 - q(\lambda))\lambda^n,$$

onde

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n}.$$

Como  $q(\lambda)$  é monótona decrescente,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} q(\lambda) = +\infty$  e  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(\lambda) = 0$ , tem-se que existe um único  $\lambda > 0$ , tal que

$$q(\lambda) = 1.$$

Assim, existe um único  $\lambda > 0$  tal que

$$P_L(\lambda) = 0.$$

O que implica que a matriz de Leslie tem um único autovalor positivo, este autovalor será denotado por  $\lambda_1$ .

Falta mostrar que a multiplicidade algébrica de  $\lambda_1$  é um. Para tanto será mostrado que  $P'_L(\lambda_1) \neq 0$ .

Determinando a derivada de  $P_L(\lambda)$  em  $\lambda_1$  tem-se que

$$P'_L(\lambda_1) = -q'(\lambda_1)\lambda_1^n + n(1 - q(\lambda_1))\lambda_1^{n-1},$$

como  $q(\lambda_1) = 1$ , segue que

$$P'_L(\lambda_1) = -q'(\lambda_1)\lambda_1^n,$$

com  $\lambda_1 \neq 0$ .

Falta mostrar que  $q'(\lambda_1) \neq 0$ . De fato, calculando a derivada de  $q(\lambda)$  em  $\lambda_1$ , segue que

$$q'(\lambda_1) = -\frac{a_1}{\lambda_1^2} - \frac{2a_2b_1}{\lambda_1^3} - \frac{3a_3b_1b_2}{\lambda_1^4} - \dots - \frac{na_nb_1b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}.$$

Por definição, todos os  $b_i$ 's são positivos e não nulos, pelo menos um dos  $a_i$ 's é não nulo e como  $\lambda_1 > 0$ , tem-se que  $q'(\lambda_1) \neq 0$ .

Logo,  $\lambda_1$  tem multiplicidade algébrica 1.

Como a multiplicidade algébrica de  $\lambda_1$  é 1, o autoespaço associado a ele terá dimensão 1. Seja  $u_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  um autovetor associado a  $\lambda_1$ , isto é,  $Lu_1 = \lambda_1 u_1$ . Assim,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_1 x_2 \\ \lambda_1 x_3 \\ \vdots \\ \lambda_1 x_n \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n = \lambda_1 x_1 \\ b_1 x_1 = \lambda_1 x_2 \\ b_2 x_2 = \lambda_1 x_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} x_{n-1} = \lambda_1 x_n \end{cases} \quad (3.14)$$

Da segunda linha do sistema (3.14), tem-se que

$$x_2 = \frac{b_1 x_1}{\lambda_1}. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) na 3ª linha do sistema (3.14), obtém-se

$$x_3 = \frac{b_2 x_2}{\lambda_1} = \frac{b_1 b_2 x_1}{\lambda_1^2}. \quad (3.16)$$

E assim por diante, até chegar na última linha do sistema (3.14), tem-se

$$x_n = \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1} x_1}{\lambda_1^{n-1}}. \quad (3.17)$$

Portanto,  $u_1$  é da forma

$$\begin{aligned} u_1 &= \left( x_1, \left( \frac{b_1}{\lambda_1} \right) x_1, \left( \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \right) x_1, \dots, \left( \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \right) x_1 \right)^T \\ &= x_1 \left( 1, \frac{b_1}{\lambda_1}, \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2}, \dots, \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \right)^T. \end{aligned}$$

Ou seja, qualquer autovetor associado a  $\lambda_1$  será um múltiplo do vetor

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

o qual possui todas as entradas positivas, pois  $\lambda_1, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  são todos positivos.

Os teoremas (3.2.2) e (3.2.3) têm por objetivo garantir que o comportamento a longo prazo da distribuição etária da população é determinado pelo autovalor positivo  $\lambda_1$  e seu autovetor  $u_1$ .

**Teorema 3.2.2 (Autovalores de uma Matriz de Leslie)**

Se  $\lambda_1$  é o único autovalor positivo de uma matriz de Leslie  $L$  e  $\lambda_k$  é qualquer outro autovalor real ou complexo de  $L$ , então  $|\lambda_k| \leq \lambda_1$ .

*Demonstração:* Seja  $\lambda_1 > 0$  um autovalor de  $L$  que satisfaz  $q(\lambda_1) = 1$ , isto é,

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_1}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^n} = 1$$

ou ainda,

$$a_1 \lambda_1^{-1} + a_2 b_1 \lambda_1^{-2} + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} \lambda_1^{-n} = 1. \quad (3.19)$$

Seja  $\lambda_k \neq 0$  outro autovalor de  $L$ , escreva

$$\lambda_k = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta), \quad (3.20)$$

como  $\lambda_k$  também satisfaz  $q(\lambda_k) = 1$ , tem-se

$$1 = \frac{a_1}{\lambda_k} + \frac{a_2 b_1}{\lambda_k^2} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_k^n}, \text{ com } \lambda_k \neq 0. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) em (3.21), segue que

$$1 = \frac{a_1}{r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} + \frac{a_2 b_1}{r^2(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^2} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n}$$

ou ainda,

$$1 = \frac{a_1}{r}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{-1} + \frac{a_2 b_1}{r^2}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{-2} + \dots \\ \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{-n}.$$

Pelo Teorema de De Moivre, obtém-se

$$1 = \frac{a_1}{r}[\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)] + \frac{a_2 b_1}{r^2}[\cos(-2\theta) + i\operatorname{sen}(-2\theta)] + \dots \\ \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\operatorname{sen}(-n\theta)],$$

como  $\cos(-n\theta) = \cos(n\theta)$  e  $\operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen}(n\theta)$ , para qualquer  $n$  inteiro, segue que

$$1 = \frac{a_1}{r}[\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta] + \frac{a_2 b_1}{r^2}[\cos(2\theta) - i\operatorname{sen}(2\theta)] + \dots \\ \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}[\cos(n\theta) - i\operatorname{sen}(n\theta)]. \quad (3.22)$$

Separando a parte real e a parte imaginária da equação (3.22), tem-se

$$1 = \frac{a_1}{r}\cos\theta + \frac{a_2 b_1}{r^2}\cos(2\theta) + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}\cos(n\theta), \quad (3.23)$$

e

$$0 = -\frac{a_1}{r}\operatorname{sen}\theta - \frac{a_2 b_1}{r^2}\operatorname{sen}(2\theta) - \dots - \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n}\operatorname{sen}(n\theta).$$

Tomando o valor absoluto em ambos os lados de (3.23) e usando a desigualdade triangular, obtém-se

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \frac{a_1}{r} \cos\theta + \frac{a_2 b_1}{r^2} \cos(2\theta) + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{r^n} \cos(n\theta) \right| \leq \\ &\leq \frac{a_1}{|r|} |\cos\theta| + \frac{a_2 b_1}{|r^2|} |\cos(2\theta)| + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{|r^n|} |\cos(n\theta)| \leq \\ &\leq \frac{a_1}{|r|} + \frac{a_2 b_1}{|r^2|} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{|r^n|}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$1 \leq a_1 |r|^{-1} + a_2 b_1 |r|^{-2} + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} |r|^{-n}. \quad (3.24)$$

Comparando (3.19) e (3.24), segue que  $|r| \leq \lambda_1$ .

Logo,  $|\lambda_k| \leq |\lambda_1|$ .

*Nota: Teorema de De Moivre*

Se  $n$  é qualquer inteiro, então  $[\cos(\theta) + isen(\theta)]^n = \cos(n\theta) + isen(n\theta)$ .

O Teorema (3.2.2) não garante que  $|\lambda_k| < \lambda_1$  para todo  $k \neq 1$ . Se  $|\lambda_k| < \lambda_1$ , segue que  $\lambda_1$  é um **autovalor dominante** de  $L$ , mas nem todas as matrizes de Leslie satisfazem a condição mencionada.

**Exemplo 3.2.1** *Encontre os autovalores da matriz de Leslie*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

*Resolução:* Para encontrar os autovalores de  $L$  é necessário determinar as raízes do polinômio característico de  $L$ , ou seja, as raízes de  $P_L(\lambda) = |\det(\lambda I - L)|$ ,

$$P_L(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -5 \\ -\frac{2}{5} & \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1).$$

Assim, as raízes de  $P_L(\lambda)$  são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  e  $\lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Portanto os autovalores da matriz  $L$  são  $1$ ,  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  e  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , sendo

1 o único autovalor positivo.

Conforme (ANTON, 2001) p. 482, no exemplo (3.2.1) os módulos dos autovalores encontrados são iguais a 1, sendo assim  $\lambda_1 = 1$  não é dominante. A matriz de Leslie  $L$ , dada acima, possui a propriedade  $L^3 = I$ . Então para qualquer escolha da distribuição etária inicial  $x^{(0)}$  tem-se

$$x^{(0)} = x^{(3)} = x^{(6)} = \dots = x^{(3k)} = \dots$$

Ou seja, o vetor de distribuição etária oscila num período de três unidades de tempo. Essas oscilações são denominadas **ondas populacionais**; se o autovalor  $\lambda_1$  fosse dominante tais oscilações não aconteceriam, o que será exposto no próximo Teorema.

### **Teorema 3.2.3 (Autovalor Dominante)**<sup>3</sup>

*Se duas entradas sucessivas  $a_i$  e  $a_{i+1}$  da primeira linha de uma matriz de Leslie  $L$  são não nulas, então o autovalor positivo de  $L$  é dominante.*

A demonstração do Teorema 3.2.3 usa o Teorema de Perron-Frobenius e alguns conceitos de grafo orientado, e foge do escopo deste trabalho, a mesma pode ser encontrada em Mesquita, Artigo 03, p.68.

Assim, conforme (ANTON, 2001) p. 482, deste modo, se a população feminina tem duas faixas etárias férteis seguidas, então a matriz de Leslie possui um autovalor dominante. No Exemplo (3.2.1) somente a terceira faixa etária é fértil, logo não é válida a hipótese do Teorema do Autovalor Dominante. Para dar continuidade ao trabalho, será suposto sempre que a condição do Teorema do Autovalor Dominante seja satisfeita.

Supondo que  $L$  seja diagonalizável. Então,  $L$  possui  $n$  autovalores,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , distintos ou não, e  $n$  autovetores associados linearmente independentes,  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Denominando o autovalor dominante por  $\lambda_1$  e escrevendo uma matriz cujas colunas são os autovetores de  $L$ :

$$P = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T.$$

A diagonalização de  $L$  é dada por

---

<sup>3</sup>(ANTON, 2001)

$$L = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

O que implica que

$$L^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

sendo  $k = 1, 2, \dots$ . Para qualquer vetor de distribuição etária inicial  $x^{(0)}$ , segue que

$$L^k x^{(0)} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} x^{(0)}, \quad (3.25)$$

$k = 1, 2, \dots$ . Dividindo os dois membros da equação (3.25) por  $\lambda_1^k \neq 0$  e substituindo  $L^k x^{(0)}$  por  $x^{(k)}$ , pois  $L^k x^{(0)} = x^{(k)}$ , tem-se que

$$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{pmatrix} P^{-1} x^{(0)}. \quad (3.26)$$

Como  $\lambda_1$  é um autovalor dominante, então  $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ , para  $i = 2, 3, \dots, n$ . Sendo assim,  $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , para  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Tomando o limite quando  $k$  tende a infinito na equação (3.26), obtém-se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} \right\} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} x^{(0)}, \quad (3.27)$$

pois  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k = 0$  e o limite de uma constante é a própria constante.

A matriz  $P$  tem ordem  $n$ , pois suas colunas são os  $n$  autovetores de  $L$ . Desenvolvendo o lado direito da igualdade (3.27) segue que

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} \right\} = \\ & = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & \dots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & \dots & u_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} \right\} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

O produto de  $P^{-1}$  por  $x^{(0)}$  é uma matriz coluna. Denotando a primeira entrada dessa matriz pela constante  $c$ , tem-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} \right\} = \begin{pmatrix} cu_{11}^{(0)} \\ cu_{12}^{(0)} \\ \vdots \\ cu_{1n}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Logo, o lado direito da igualdade (3.27) pode ser reescrito como  $cu_1$ , onde  $c$  é uma constante positiva que depende do vetor de dis-



tribuição etária inicial  $x^{(0)}$ . Substituindo o lado direito da igualdade (3.27) por  $cu_1$ , segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} \right\} = cu_1. \quad (3.28)$$

A equação (3.28) fornece a aproximação

$$x^{(k)} \simeq c\lambda_1^k u_1, \quad (3.29)$$

para valores grandes de  $k$ . Pela equação (3.29), tem-se que

$$x^{(k-1)} \simeq c\lambda_1^{(k-1)} u_1. \quad (3.30)$$

Comparando as equações (3.29) e (3.30), segue que

$$x^k \simeq \lambda_1 x^{(k-1)}, \quad (3.31)$$

para valores grandes de  $k$ .

Ou seja, segundo (ANTON, 2001) p. 483, para valores grandes de tempo, cada vetor de distribuição etária é aproximadamente um múltiplo constante do vetor de distribuição etária anterior, onde a constante é o autovalor positivo da matriz de Leslie. Assim, a *proporção* de fêmeas em cada faixa etária torna-se constante. No seguinte exemplo é possível verificar que estas proporções no limite podem ser fixadas a partir do autovetor  $u_1$ .

**Exemplo 3.2.2** *No exemplo (3.1.1) a matriz de Leslie é*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico  $P(\lambda) = \det(\lambda I - L)$ , segue que

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -4 & -3 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda \end{vmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8}.$$

Para determinar os autovalores de  $L$  é necessário resolver a equação  $P(\lambda) = 0$ , ou seja,

$$\lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow 8\lambda^3 - 16\lambda - 3 = 0 \stackrel{\text{fatorando}}{\Rightarrow} (2\lambda - 3)(4\lambda^2 + 6\lambda + 1) = 0,$$

cujas raízes são  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{4} \simeq -0,19$  e  $\lambda_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \simeq -1,31$ , que são os autovalores de  $L$ . Sendo  $\lambda_1 = \frac{3}{2}$  o único autovalor positivo, então, por (3.18), o autovetor associado à  $\lambda_1$  é

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\frac{3}{2}} \\ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{(\frac{3}{2})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Logo, o subespaço gerado por todos os autovetores de  $\lambda_1$  é

$$U\left(\frac{3}{2}\right) = \left[ \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}\right) \right].$$

Pode-se concluir que a população em cada faixa etária cresce por um fator de  $\frac{3}{2}$  ou a taxa de crescimento em estado estacionário é 1,5, ou seja, aumenta 50% a cada período de tempo, que no exemplo (3.1.1), é a cada um ano.

No exemplo (3.1.1) existem 100 fêmeas inicialmente na faixa etária um. Observando somente uma faixa etária para simplificar os cálculos, se  $x^{(0)} = 100$  usando (3.31) encontra-se  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ , como segue

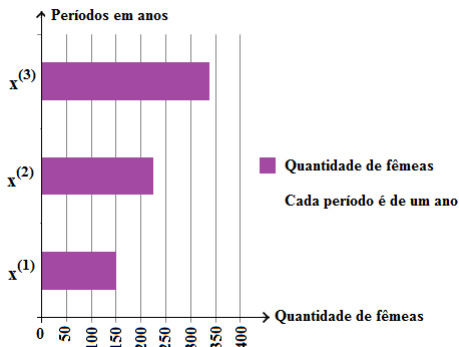
$$x^{(1)} \simeq \lambda_1 x^{(0)} = \frac{3}{2} \cdot 100 = 150,$$

$$x^{(2)} \simeq \lambda_1 x^{(1)} = \frac{3}{2} \cdot 150 = 225,$$

$$x^{(3)} \simeq \lambda_1 x^{(2)} = \frac{3}{2} \cdot 225 = 337,5$$

e assim sucessivamente, em qualquer período e em qualquer faixa etária. Observando que a cada período de tempo a quantidade de fêmeas aumenta 50% em relação ao período anterior. Veja a seguinte figura

Figura 5 – Distribuição etária



Usando (3.29), tem-se que

$$x^{(k)} \simeq c \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

A adição das razões equivale ao total de fêmeas nas três faixas etárias, ou seja,  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = \frac{25}{18}$ , assim  $\frac{25}{18}$  corresponde a 100% das fêmeas. Determinando a porcentagem equivalente a cada uma parcela da soma anterior, segue que

$$1 \equiv \frac{100\%}{\frac{25}{18}} = \frac{1800\%}{25} = 72\%, \text{ isto é, } 1 \text{ equivale a } 72\% \text{ das fêmeas,}$$

$$\frac{1}{3} \equiv \frac{\frac{100\%}{3}}{\frac{25}{18}} = \frac{1800\%}{75} = 24\%, \text{ isto é, } \frac{1}{3} \text{ equivale a } 24\% \text{ das fêmeas e}$$

$$\frac{1}{18} \equiv \frac{\frac{100\%}{18}}{\frac{25}{18}} = \frac{1800\%}{450} = 4\%, \text{ isto é, } \frac{1}{18} \text{ equivale } 4\% \text{ das fêmeas.}$$

Ou seja, a longo prazo, as fêmeas estarão distribuídas entre as três faixas etárias na proporção  $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{18}$ . Isto é, na primeira faixa etária 72% da população feminina será composta por jovens, na segunda faixa etária 24% da população feminina será composta por adolescentes e na terceira faixa etária 4% da população feminina será composta por adultos.

O Teorema do Autovalor Dominante garante que, se a população de fêmeas tem duas faixas etárias férteis sucessivas, então a matriz de Leslie tem um autovalor dominante.

Retornando a equação (3.29), que fornece o vetor de distribuição etária da população a longo prazo:

$$x^{(k)} \simeq c\lambda_1^k u_1.$$

De acordo com o autovalor positivo  $\lambda_1$ , considere os seguintes casos (ANTON, 2001) p. 484:

- (i) Se  $\lambda_1 > 1$  a população acaba aumentando;
- (ii) Se  $\lambda_1 < 1$  a população acaba diminuindo;
- (iii) Se  $\lambda_1 = 1$  a população acaba estabilizando.

O caso  $\lambda_1 = 1$  é relativamente importante, pois determina uma população com **crescimento populacional nulo**. Para qualquer distribuição etária inicial, a população tende a uma distribuição etária limite que é algum múltiplo do autovetor  $u_1$ . A partir das Equações (3.10) e (3.12) segue que  $\lambda_1$  é um autovalor se, e somente se,

$$a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} = 1. \quad (3.32)$$

A expressão

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} \quad (3.33)$$

é chamada a **taxa líquida de reprodução** da população. Assim, é possível afirmar que uma população tem crescimento populacional nulo se, e somente se, sua taxa líquida de reprodução é 1.

### 3.3 APLICAÇÃO DA MATRIZ DE LESLIE

#### 3.3.1 Projeção da População Brasileira Feminina por Faixas Etárias

A projeção foi feita a partir de dados colhidos do último Censo Demográfico Brasileiro do ano de 2010, sendo este feito pelo IBGE. Originalmente as tabelas apresentam dados em intervalos de idades de cinco em cinco anos. Entretanto com o objetivo de simplificar o procedimento algébrico para a aplicação da matriz de Leslie, foi considerado os dados da população brasileira do ano de 2010 por faixas etárias de 10 anos cada.

Tabela 2 – População residente - percentual do total geral

<b>Intervalo de Idade</b>	<b>Homens</b>	<b>%</b>	<b>Mulheres</b>	<b>%</b>
[0, 10)	14 649 310	7,68	14 125 191	7,4
[10, 20)	17 284 703	9,07	16 869 220	8,84
[20, 30)	17 086 455	8,95	17 257 326	9,05
[30, 40)	14 485 258	7,60	15 147 549	7,94
[40, 50)	12 012 693	6,29	12 830 450	6,73
[50, 60)	8 738 383	4,58	9 680 371	5,07
[60, 70)	5 257 992	2,76	6 098 083	3,20
[70, 80)	2 764 577	1,45	3 550 847	1,86
[80, 90)	977 524	0,51	1 500 802	0,79
[90, 100)	143 110	0,08	273 280	0,14
100 ou mais	6 987	0,00	15 689	0,01
<b>Total</b>	<b>93 406 990</b>	<b>48,97</b>	<b>97 348 809</b>	<b>51,03</b>

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/200> # resultado

Tabela 3 – Filhos tidos nascidos vivos

<b>Intervalo de Idade das Mulheres</b>	<b>Filhos Nascidos Vivos</b>
[0, 10)	
[10, 20)	641 031
[20, 30)	1 671 002
[30, 40)	818 619
[40, 50)	87 448
[50, 60)	10 168
[60, 70)	0
[70, 80)	0
[80, 90)	0
[90, 100)	0
100 ou mais	0
<b>Total</b>	<b>3 228 268</b>

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/96> # resultado

Para analisar o comportamento da população feminina brasileira com idades entre zero e 90 anos no futuro, foram tomadas dez faixas etárias de dez anos cada, conforme tabela (5). A população com idade superior a 100 anos não está sendo considerada por ser pouco representativa.

Tabela 4 – Óbitos por Sexo

Intervalo de Idade	Total	Homens	Mulheres
[0, 10)	28 816	17 174	11 642
[10, 20)	20 173	15 813	4 360
[20, 30)	53 813	45 774	8 039
[30, 40)	50 427	37 782	12 645
[40, 50)	76 240	50 302	25 938
[50, 60)	127 706	77 940	49 766
[60, 70)	165 940	96 017	69 923
[70, 80)	201 319	110 086	91 233
80 anos ou mais	252 770	111 233	141 537
Total	977 204	562 121	415 083

*Fonte: IBGE, Censo Demográfico 2010*

Tabela 5 – Mulheres, filhas nascidas vivas e óbitos femininos

Intervalo de Idade	Mulheres	Filhas Nascidas Vivas	Óbitos
[0, 10)	14 125 191	0	11 642
[10, 20)	16 869 220	320 516	4 360
[20, 30)	17 257 326	835 501	8 039
[30, 40)	15 147 549	409 310	12 645
[40, 50)	12 830 450	43 724	25 938
[50, 60)	9 680 371	5 084	49 766
[60, 70)	6 098 083	0	69 923
[70, 80)	3 550 847	0	91 233
[80, 90)	1 500 802	0	81 780
[90, 100)	273 280	0	48 865
100 ou mais	15 689	0	10 892
Total	97 348 809	1 614 135	415 083

*Fonte: IBGE*

Os dados fornecidos pelo IBGE não especificam o número médio de filhas tidas nascidas vivas pelas mulheres em cada faixa etária considerada no ano de 2010. Sendo assim, para obter o número médio de filhas tidas nascidas vivas foi considerado 50% dos valores em cada faixa etária da tabela (3). Como na tabela (4) os óbitos de pessoas de 80 anos ou mais não estão classificados por faixas etárias, adotou-se como critério de distribuição do número total de óbitos acima de 80 anos a

proporcionalidade com as residentes vivas, isto pode levar a uma inconsistência, que pode ser objeto de pesquisa em um trabalho futuro. Para fins de aplicação do modelo de Leslie admite-se válido o critério.

Utilizando os valores contidos na tabela (5) encontra-se os parâmetros  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) e  $b_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ), como segue:

- O número médio de filhas nascidas por mulher durante o tempo em que ela está na  $i$ -ésima faixa etária é dado por: <sup>4</sup>
- \*  $[0, 10)$ :  $a_1 = 0$ , pois as meninas entre zero e 10 anos não geram filhas,
- \*  $[10, 20)$ :  $a_2 = \frac{320516 \cdot 10}{16869220} \simeq 0, 2$ ,
- \*  $[20, 30)$ :  $a_3 = \frac{835501 \cdot 10}{17257326} \simeq 0, 5$  (o maior número de filhas nasceram de mulheres nessa faixa etária),
- \*  $[30, 40)$ :  $a_4 = \frac{409310 \cdot 10}{15147549} \simeq 0, 3$ ,
- \*  $[40, 50)$ :  $a_5 = \frac{43724 \cdot 10}{12830450} \simeq 0, 03$ ,
- \*  $[50, 60)$ :  $a_6 = \frac{5084 \cdot 10}{9680371} \simeq 0, 01$ ,
- \*  $[60, 70)$ ;  $[70, 80)$ ;  $[80, 90)$  e  $[90, 100)$ :  $a_7 = 0, a_8 = 0, a_9 = 0$  e  $a_{10} = 0$  respectivamente, pois não nascem filhas de mulheres nesses intervalos de idades.
- A fração de mulheres que sobreviveram de uma faixa etária para outra no ano de 2010 é dada por:

$$b_1 = \frac{14125191 - 11642 \cdot 10}{14125191} = \frac{14008771}{14125191} \simeq 0, 99176,$$

$$b_2 = \frac{16869220 - 4360 \cdot 10}{16869220} = \frac{16825620}{16869220} \simeq 0, 99742,$$

$$b_3 = \frac{17257326 - 8039 \cdot 10}{17257326} = \frac{17176936}{17257326} \simeq 0, 99534,$$

---

<sup>4</sup>As tabelas fornecem valores referentes ao ano de 2010 e os intervalos das faixas etárias são de 10 em 10 anos. Como critério de ajuste multiplicou-se o número de nascidas vivas e óbitos por 10.

$$b_4 = \frac{15147549 - 12645 \cdot 10}{15147549} = \frac{15021099}{15147549} \simeq 0,99165,$$

$$b_5 = \frac{12830450 - 25938 \cdot 10}{12571070} = \frac{12799512}{12830450} \simeq 0,97978,$$

$$b_6 = \frac{9680371 - 49766 \cdot 10}{9680371} = \frac{9182711}{9680371} \simeq 0,94859,$$

$$b_7 = \frac{6098083 - 69923 \cdot 10}{6098083} = \frac{5398853}{6098083} \simeq 0,88534,$$

$$b_8 = \frac{3550847 - 91233 \cdot 10}{3550847} = \frac{2638517}{3550847} \simeq 0,74307 \text{ e}$$

$$b_9 = \frac{1500802 - 81780 \cdot 10}{1500802} = \frac{683002}{1500802} \simeq 0,45509.$$

Organizando os valores dos parâmetros  $a_i$  e  $b_i$  na tabela (6) obtém-se uma melhor visualização dos resultados obtidos.

Tabela 6 – Parâmetros  $a_i$  e  $b_i$

<b>Intervalo de Idade</b>	<b><math>a_i</math></b>	<b><math>b_i</math></b>
[0, 10)	0	0,99176
[10, 20)	0,2	0,99742
[20, 30)	0,5	0,99534
[30, 40)	0,3	0,99165
[40, 50)	0,03	0,97978
[50, 60)	0,01	0,94859
[60, 70)	0	0,88534
[70, 80)	0	0,74307
[80, 90)	0	0,45509
[90, 100)	0	

*Fonte: Deduzida do IBGE*

Portanto, da tabela (6), escreve-se a matriz de Leslie  $L$  para a população



feminina brasileira do ano de 2010. A matriz  $L$  está na página 73 desse trabalho.

Observando a matriz  $L$ , verifica-se a existência de mais de duas faixas etárias férteis sucessivas, então pelo Teorema (3.2.3)  $L$  possui um autovalor dominante. Os autovalores de  $L$  são as raízes do polinômio característico, que por (3.9) é dado por:

$$P_L(\lambda) = \det(\lambda I - L)$$

$$\begin{aligned} P_L(\lambda) = & \lambda^{10} - a_1 \lambda^9 - a_2 b_1 \lambda^8 - a_3 b_1 b_2 \lambda^7 - a_4 b_1 b_2 b_3 \lambda^6 - a_5 b_1 b_2 b_3 b_4 \lambda^5 - \\ & - a_6 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \lambda^4 - a_7 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \lambda^3 - a_8 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 \lambda^2 - \\ & - a_9 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 \lambda - a_{10} b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9. \end{aligned}$$

Substituindo os parâmetros  $a_i$  e  $b_i$ , pelos seus respectivos valores, no polinômio característico segue que

$$\begin{aligned} P_L(\lambda) = & \lambda^{10} - 0.\lambda^9 - 0, 2.0, 99176.\lambda^8 - 0, 5.0, 99176.0, 99742.\lambda^7 - \\ & - 0, 3.0, 99176.0, 99742.0, 99534.\lambda^6 - \\ & - 0, 03.0, 99176.0, 99742.0, 99534.0, 99165.\lambda^5 - \\ & - 0, 01.0, 99176.0, 99742.0, 99534.0, 99165.0, 97978.\lambda^4. \end{aligned}$$

O polinômio característico  $P_L(\lambda)$  pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P_L(\lambda) = & \lambda^4(\lambda^6 - 0, 198352\lambda^4 - 0, 4946006296\lambda^3 - \\ & - 0, 2953774743996384\lambda^2 - \\ & - 0, 029291107248840141936\lambda - \\ & - 0, 00956628035342286475535136), \end{aligned}$$

zero é raiz de multiplicidade quatro de  $P_L(\lambda)$ .

Usando o site Wolfram Alpha as outras raízes de  $P_L(\lambda)$  são:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\simeq 1,00848, \\
\lambda_2 &\simeq -0,517432, \\
\lambda_3 &\simeq -0,223111 - 0,677323i, \\
\lambda_4 &\simeq -0,223111 + 0,677323i, \\
\lambda_5 &\simeq -0,0224122 - 0,188538i \text{ e} \\
\lambda_6 &\simeq -0,0224122 + 0,188538i.
\end{aligned}$$

Logo, podemos aproximar o autovalor positivo e o autovetor associado por

$$\lambda_1 \simeq 1,00848 \text{ e } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \\ \frac{b_1 b_2 b_3 b_4}{\lambda_1^4} \\ \frac{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5}{\lambda_1^5} \\ \frac{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6}{\lambda_1^6} \\ \frac{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7}{\lambda_1^7} \\ \frac{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8}{\lambda_1^8} \\ \frac{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9}{\lambda_1^9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,000000 \\ 0,9834206 \\ 0,9726353 \\ 0,9599625 \\ 0,9439421 \\ 0,9170788 \\ 0,8626168 \\ 0,7572874 \\ 0,5579856 \\ 0,2517985 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Portanto, se as mulheres brasileiras continuarem a se reproduzir e morrer no mesmo ritmo de 2010, do autovalor  $\lambda_1$ , conclui-se que a população feminina brasileira tende a estabilidade no futuro, com um crescimento da ordem de  $0,848\% \simeq 1\%$  a cada dez anos. No autovetor  $u_1$  observa-se que, no futuro, para 10 000 000 de mulheres entre 0 e 10 anos de idade, haverá 9 834 206 mulheres entre os 10 e os 20 anos de idade, 9 726 353 mulheres entre os 20 e os 30 anos de idade, e assim sucessivamente.



### 3.3.2 Verificação de Sustentabilidade do Sistema Previdenciário Brasileiro

Nesta seção apresenta-se uma breve exposição do sistema previdenciário brasileiro, considerando a distribuição etária feminina brasileira do ano de 2010 com o objetivo de verificar a sustentabilidade futura desse sistema, utilizando a matriz de Leslie.

O princípio básico de previdência é a captação de recurso financeiro para utilização futura.

Modelos de previdência:

- Fundos de capitalização / Fundos de pensão  
Conforme (CABRAL, 2012), jornal O Globo, 28/12, esse modelo é definido por uma contribuição de acordo com o salário e o ganho futuro está diretamente relacionado com a quantia acumulada.
- Sistema de previdência social  
Este modelo está fundamentado no princípio da repartição simples, com o aval do Tesouro Nacional, ou seja, o trabalhador contribui com um percentual de sua renda (geralmente 11%), complementado com a contribuição do empregador (geralmente 22%). Este montante de recursos provenientes dos contribuintes que estão na ativa constitui a principal fonte para o custeio da fatia da população que usufrui dos benefícios da previdência social. Logo, para que o sistema de previdência seja sustentável é necessário que a base de contribuintes traga recursos suficientes para o pagamento dos benefícios, caso contrário, segundo Renata Cabral, o Tesouro Nacional tem que honrar com esses custos, consequentemente toda sociedade paga.

Pelo sistema previdenciário brasileiro uma pessoa conquista o benefício da aposentadoria depois de contribuir 30 anos para mulheres e 35 anos para homens, independente da sua idade ou se tiver 60 anos ou mais de idade tendo contribuído no mínimo 15 anos.

Sabendo que o sistema previdenciário social brasileiro está diretamente ligado a distribuição etária da população, uma das formas de se verificar a sustentabilidade é fazendo uma análise do crescimento populacional e da distribuição etária da população, projetando os cenários para momentos futuros. Nesse trabalho foi utilizado a matriz de Leslie

para fazer a análise do crescimento populacional feminino brasileiro.

*Nota:* Beneficiários, para o sistema previdenciário brasileiro não são somente os aposentados. Porém as despesas com as aposentadorias constituem o maior montante dos gastos.

Para fins de análise de sustentabilidade do sistema previdenciário brasileiro, foi considerado uma amostra da população feminina de 10 000 000 de mulheres na primeira faixa etária. Pelo autovetor (3.34) foi determinada a quantidade de mulheres nas demais faixas etárias e suas situações de acordo com o modelo previdenciário vigente. Conforme tabela (7).

Tabela 7 – Situação previdenciária feminina

<b>Intervalo de Idades</b>	<b>Mulheres</b>	<b>Situação</b>
[0, 10)	10 000 000	não contribuintes
[10, 20)	9 834 206	não contribuintes
[20, 30)	9 726 353	contribuintes
[30, 40)	9 599 625	contribuintes
[40, 50)	9 439 421	contribuintes
[50, 60)	9 170 788	contribuintes
[60, 70)	8 626 168	contribuintes aposentadas
[70, 80)	7 572 874	contribuintes aposentadas
[80, 90)	5 579 856	contribuintes aposentadas
[90, 100)	2 517 985	contribuintes aposentadas
Total	72 067 276	

*Fonte: Deduzida pela Matriz de Leslie*

*Observação:* Encontra-se em estudo atualmente no Congresso Nacional uma reforma do sistema previdenciário, que tem como principais modificações a extinção da aposentadoria por tempo de contribuição e a idade mínima para a obtenção do benefício a partir dos 65 anos. Isto aumenta significativamente a quantidade de contribuintes e reduz a mesma proporção o número de beneficiários.

Pela tabela (7) observa-se que aproximadamente 27,52% das mulheres não são contribuintes, 19,84% das mulheres são contribuintes aposentadas e 52,64% são contribuintes. Logo, pela aplicação da matriz de Leslie e considerando que o número de homens é próximo da quantidade de mulheres, verifica-se fortes indícios que o atual sis-

tema previdenciário brasileiro não se sustentará no futuro, mantidos a tendência de crescimento populacional e longevidade. Para que o sistema se mantenha sustentável serão necessários ajustes de modo que a base contribuinte seja suficientemente superior de modo a custear os benefícios da parcela da população que se encontra aposentada.

O que foi exposto no último parágrafo está de acordo com o artigo de (MOREIRA, 2015), sobre a previsão da ONU, que o crescimento demográfico no Brasil vai desacelerar em 2040.

## 4 CONCLUSÃO

A síntese dos estudos, deste trabalho demonstra que sabendo o valor da média de nascimento e o percentual de sobrevivência em cada faixa etária da parte fêmea animal ou humana de uma população, podemos estruturar o modelo matricial de Leslie. Determinando os autovalores da matriz, é possível ordenar a distribuição feminina em cada faixa etária a longo prazo.

Por outro lado, usando o conceito de limite, asseguramos a existência e unicidade do autovalor positivo de multiplicidade um. Considerando tal autovalor dominante, deduzimos que a proporção de fêmeas em cada faixa etária será constante e o autovalor dominante é a razão do crescimento populacional entre duas faixas etárias consecutivas.

Concluimos que os conteúdos: noção intuitiva de limites, autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes, expostos no texto foram essenciais para a compreensão e aplicação do modelo matricial de Leslie.

Vimos através de uma aplicação da matriz de Leslie que existem fortes indícios que o atual sistema previdenciário brasileiro não se sustentará no futuro. Isto posto, podemos fazer adaptações das teorias em exemplos práticos para aplicação na educação básica.

O estudo deste trabalho foi focado no crescimento populacional feminino e por analogia procurou-se estimar, na última seção do mesmo, a população masculina correspondente. No entanto poderia ficar aqui como sugestão o desenvolvimento de um modelo para estudar o crescimento de populações masculinas.





## REFERÊNCIAS

ANTON, H. **Elementary linear algebra**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.

BARCO, K. V. P. Modelo matricial de leslie: conceitos algébricos no estudo de crescimento populacional por faixa etária. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2012.

BOLDRINI, J. L. et al. **Henry-Álgebra Linear-São Paulo, 3ª edição**. [S.l.]: Harper & Row do Brasil, 1986.

CABRAL, R. Ao redor do mundo, diferentes formatos de previdência. <https://oglobo.globo.com/economia/ao-redor-do-mundo-diferentes-formatos-de-previdencia-7151073>, 2012.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra linear e aplicações**. [S.l.]: Atual, 2007.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Curso de Álgebra Linear, Um Vol. 34**. [S.l.]: Edusp, 2007.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Calculo A: funções, limite, derivação, noções de integração**. [S.l.]: Pearson Education, 1990.

KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. [S.l.: s.n.], 1998.

LANG, S. **CÁLCULO, vol. I**. [S.l.: s.n.], 1977.

LAY, D. C. C. Ricardo; iório, valéria de magalhães. **Álgebra linear e suas aplicações. 2ª Edição**, 1999.

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações. 4ª edição**. [S.l.: s.n.], 1999.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra lineal**. [S.l.: s.n.].

MESQUITA, D. Matrizes de leslie e valores próprios dominantes. **Matemática Universitária nos 50/51**, Univ. do Porto.

MOREIRA, A. Crescimento demográfico no brasil vai desacelerar em 2040, prevê onu.

<http://www.valor.com.br/internacional/4154720/crescimento-demografico-no-brasil-vai-desacelerar-em-2040-preve-onu>, 2015.

NETO, A. C. M.; CAMINHA, A. **Fundamentos de Cálculo**. [S.l.: s.n.], 2015.

POOLE, D. **Álgebra linear**. [S.l.]: Cengage Learning Editores, 2004.

SILVA, A. G. F. G. d. Matemática aplicada à biologia. 2016.

SILVEIRA, A. R. d. Matriz de leslie e aplicações. 2016.